

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

*В. В. Коваленко, Н. В. Викторова, Е. В. Гайдукова*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации  
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности «Гидрология» направления подготовки  
дипломированных специалистов «Гидрометеорология»*



Санкт-Петербург  
2006

модели, без глубокого исследования физического смысла данного параметра. Основное преимущество методов идентификации – экономическая эффективность. Например, чтобы найти электрическое сопротивление по формуле  $R = u/i$  (т. е. использовать метод идентификации), достаточно включить его в электрическую цепь, подать известное напряжение и измерить силу тока. Если же исходить из формулы  $R = \rho l/s$ , то кроме геометрических измерений надо выполнить дорогостоящие лабораторные исследования для определения удельного сопротивления  $\rho$  материала проводника.

Недостаток методов идентификации связан с тем обстоятельством, что они относятся к классу обратных задач, решения которых могут быть некорректными (как известно, для корректности решения нужны его существование, единственность и устойчивость). Это общий недостаток обратных задач, когда, например, следствию пытаются найти причину. Рассмотрим следующий пример: рядом с оголенным проводом, находящимся под высоким напряжением (причина) лежит мертвый человек (следствие). По известному следствию очень сложно установить причину – совсем не обязательно, что смерть наступила от того, что человек коснулся провода: он мог просто умереть от разрыва сердца, случайно находясь в районе оголенного провода. В этом отношении прямая задача (что будет с человеком, который коснется проводов высокого напряжения?) корректна в том смысле, что ответ более однозначен, чем в первом случае (хотя и тут может быть некорректность).

Однако этот недостаток методов идентификации можно преодолеть. Существуют пути преобразования некорректной задачи в корректную. Прежде всего – это использование дополнительной (априорной) информации об изучаемом процессе (в нашем примере такой информацией могут служить, например, следы от соприкосновения с проводом на руке человека). Один из путей – введение в математическое описание процесса шумов, т. е. дезинформации (как это ни парадоксально на первый взгляд).

Вообще успех применения методов идентификации определяется тем, что гидрология (как и все естественные науки) построена на принципах детерминизма (стохастические модели – тоже детерминированные в том смысле, что в них есть и причина и следствие).

## 4.2. Идентификация стохастической модели формирования речного стока

Исходная динамическая модель имеет вид:

$$dQ/dt = -Q/k\tau + \dot{X}/\tau.$$

Обозначим:  $-1/(k\tau) = c$  и  $\dot{X}/\tau = N$ . Будем считать, что  $c = \bar{c} + \tilde{c}$  и  $N = \bar{N} + \tilde{N}$ , где  $\tilde{c}$  и  $\tilde{N}$  – «белые шумы» с интенсивностями  $G_{\tilde{c}}$ ,  $G_{\tilde{N}}$  и  $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ . Будем считать процесс формирования стока случайным, но устанавливающимся. При этом в уравнении ФПК можно пренебречь величиной  $dp(Q, t)/dt$ , и оно примет вид:

$$dp/dQ = [(Q - a)/(b_0 + b_1Q + b_2Q^2)]p, \quad (4.1)$$

где

$$a = (G_{\tilde{c}\tilde{N}} + 2\bar{N})/(2\bar{c} + 2\bar{\tilde{c}} + G_{\tilde{c}}),$$

$$b_0 = -G_{\tilde{N}}/(2\bar{c} + 2\bar{\tilde{c}} + G_{\tilde{c}}),$$

$$b_1 = 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}/(2\bar{c} + 2\bar{\tilde{c}} + G_{\tilde{c}}),$$

$$b_2 = -G_{\tilde{c}}/(2\bar{c} + 2\bar{\tilde{c}} + G_{\tilde{c}}).$$

Таким образом, имеем ситуацию, изображенную на рис. 4.2 а. Если в прямой задаче надо найти следствие  $p(Q)$ , зная причину  $\bar{N}$  и  $G_{\tilde{N}}$  и условия  $G_{\tilde{c}}$ ,  $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$  и  $\bar{c}$ , то в задаче идентификации надо найти эти параметры, зная решение уравнения ФПК, например из рядов наблюдений за гидрологическими характеристиками. Но так как ряды наблюдений непродолжительны и позволяют надежно вычислять только несколько первых моментов распределения, то перейдем к уравнениям для моментов.

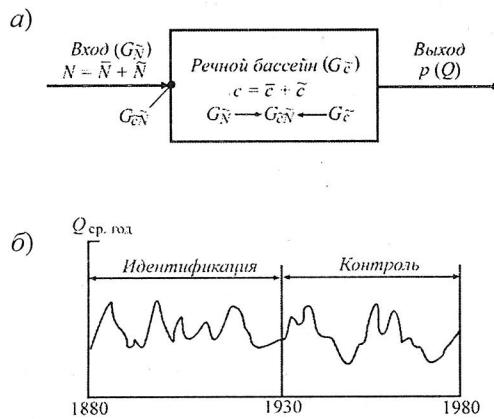


Рис. 4.2. К идентификации стохастической модели формирования речного стока.

$a$  – причинно-следственные связи в речном бассейне,  $b$  – идентифицируемый и контрольный отрезки ряда среднегодовых расходов воды.

Запишем (4.1) в виде

$$(b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2) dp/dQ = (Q - a)p,$$

умножим обе его части на  $Q^n$  и проинтегрируем по  $Q$  в бесконечных пределах. Применим к правой части формулу интегрирования по частям

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} u dU = uU \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} U du \right):$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Q^n (b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2) \frac{dp}{dQ} dQ &= [Q^n (b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2) p(Q)]_{-\infty}^{\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} [nb_0 Q^{n-1} + (n+1)b_1 Q^n + (n+2)b_2 Q^{n+1}] dQ p(Q). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &[Q^n (b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2) p(Q)]_{-\infty}^{\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} [nb_0 Q^{n-1} + (n+1)b_1 Q^n + (n+2)b_2 Q^{n+1}] dQ p(Q) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Q^{n+1} p(Q) dQ - a \int_{-\infty}^{\infty} Q^n p(Q) dQ. \end{aligned}$$

Полагая, что  $p(\pm\infty) = 0$ , и вводя обозначения для моментов  $m^n = \int Q^n p(Q) dQ$ , получаем систему алгебраических уравнений

$$nb_0 m_{n-1} + [(n+1)b_1 - a]m_n + [(n+2)b_2 + 1]m_{n+1} = 0.$$

Она связывает начальные моменты распределения с параметрами уравнения ФПК  $a, b_0, b_1$  и  $b_2$ . Полагая последовательно  $n = 0, 1, 2, 3$  и учитывая, что  $m^0 = 1$ , получаем:

$$2b_2 m_1 + b_1 + b_0 \cdot 0 - a \cdot 1 = -m_1,$$

$$3b_2 m_2 + 2b_1 m_1 + b_0 \cdot 1 - am_1 = -m_2,$$

$$4b_2 m_3 + 3b_1 m_2 + 2b_0 m_1 - am_2 = -m_3,$$

$$5b_2 m_4 + 4b_1 m_3 + 3b_0 m_2 - am_3 = -m_4.$$

В этой системе в роли известных величин выступают моменты распределения плотности вероятности расхода воды в замыкающем створе речного бассейна  $m_1 - m_4$ , а искомые величины –  $a, b_0, b_1$  и  $b_2$ . Обозначим:

$$b_i = \begin{pmatrix} -m_1 \\ -m_2 \\ -m_3 \\ -m_4 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} 2m_1 & 1 & 0 & -1 \\ 3m_2 & 2m_1 & 1 & -m_1 \\ 4m_3 & 3m_2 & 2m_1 & -m_2 \\ 5m_4 & 4m_3 & 3m_2 & -m_3 \end{pmatrix},$$

держания  $\text{CO}_2$  неустановившейся. Максимумы содержания  $\text{CO}_2$  и температуры не совпадают, именно это обстоятельство (необходимость постоянно находиться в неравновесных условиях) может стать основной проблемой. Однако основные рабочие сценарии изменения климата предполагают равновесную ситуацию.

С точки зрения оценки гидрологических последствий антропогенного изменения климата сценарий должен содержать, по крайней мере, две величины: осадков и приземной температуры. Это могут быть таблицы или карты изолиний их годовых или сезонных норм.

В качестве модели формирования стока используем уравнение ФПК. Время релаксации речного бассейна не превышает 1 года. Поэтому можно рассматривать процесс формирования стока как простую цепь Маркова, что подтверждают большинство исследователей, ибо статистически значимыми оказываются, как правило, только коэффициенты корреляции между стоком смежных лет. Но даже возможные дальние корреляции в рядах стока вовсе не говорят о том, что механизм его формирования (т. е. процессы в речном бассейне) отличаются от простого марковского процесса. Их причину надо искать во внешних воздействиях. Например, в работе [89] установлено, что спектры рядов температуры и годового стока рек характеризуются небольшим максимумом в низких частотах, соответствующих колебаниям с периодами более 10 лет. Имеющиеся данные указывают, что временные ряды атмосферных осадков на отдельных станциях с большой степенью достоверности представляют собой белый шум. Во всяком случае, во всех сценариях климата указываются только нормы соответствующих метеорологических величин и ничего не говорится о статистической структуре их рядов. Но даже если бы в климатических сценариях такая информация была задана, это не препятствовало бы использованию уравнения ФПК, просто пришлось бы расширить исследуемое фазовое пространство и рассматривать его многомерный аналог.

Так как существующие сценарии климата соответствуют равновесной ситуации, то стохастический режим формирования стока будет установившимся, в уравнении ФПК  $dp/dt \equiv 0$  и оно переходит в уравнение Пирсона (при этом предполагается обращение в нуль потока вероятности на границах области изменения  $Q$ ):

$$dp/dQ = [(Q - a)/(b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2)] p, \quad (5.2)$$

## 5.2. Моделирование гидрологических последствий антропогенного изменения климата

где

$$\begin{aligned} a &= (G_{\tilde{c}\tilde{N}} + 2\bar{N})/(2\bar{c} + G_{\tilde{c}}); & b_0 &= -G_{\tilde{N}}/(2\bar{c} + G_{\tilde{c}}), \\ b_1 &= 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}/(2\bar{c} + 2G_{\tilde{c}}); & b_2 &= -G_{\tilde{c}}/(2\bar{c} - G_{\tilde{c}}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Распределения семейства кривых Пирсона зависят от соотношения этих параметров. В гидрологии распространена кривая Пирсона III типа, а также ее варианты, позволяющие вывести эту кривую из отрицательной области при  $C_s < C_v$ . Эта кривая соответствует стохастической схеме [82], при которой повторяется в постоянных условиях одно и то же испытание, имеющее лишь два исхода (случайное событие происходит или не происходит). Каждое значение случайной величины представляет собой число осуществившихся  $m$  случаев из  $n$  возможных. Для получения кривой Пирсона III типа надо, чтобы  $b_2 \rightarrow 0$ , т. е. чтобы интенсивность  $G_{\tilde{c}}$  была нулевой или неощутимой в пределах существующей точности измерений и расчетов гидрологических характеристик ( $G_{\tilde{c}} \ll 2\bar{c} + G_{\tilde{c}}$ ). В то же самое время необходимо, чтобы  $G_{\tilde{c}\tilde{N}} \neq 0$ . В противном случае  $b_1 = b_2 = 0$  и получается нормальное распределение, что противоречит практике расчетов, явно указывающих на наличие в гидрологических рядах асимметрии.

Ситуация, при которой  $G_{\tilde{c}} = 0$  и в то же самое время  $G_{\tilde{c}\tilde{N}} \neq 0$ , требует определенной физической интерпретации. Если время релаксации  $T = \text{const}$ , то вариации коэффициента  $c$  должны создаваться только внутригодовыми вариациями осадков (так как  $\tilde{c}$  и  $\tilde{N}$  – белые шумы и поэтому их радиусы корреляции много меньше, чем  $T$ ). Вариации  $\tilde{c}$ , независимые от  $\tilde{N}$  могут появиться, например, за счет температурных воздействий, создающих внутригодовые колебания характеристик подстилающей поверхности. Исключение независимых от осадков вариаций  $\tilde{c}$ , а следовательно, допущения, что  $G_{\tilde{c}} = 0$  (или  $G_{\tilde{c}} \ll 2\bar{c} + G_{\tilde{c}}$ ) и  $b_2 \approx 0$ , обедняет возможности моделирования реальной ситуации, имеющей место на речных бассейнах (на самом деле  $G_{\tilde{c}} \ll 2\bar{c} + G_{\tilde{c}} + \bar{c}$ , ибо мы везде в этом разделе полагаем  $\bar{c} = 0$ , что, впрочем, ослабляет

## Глава 5. Пути практического применения стохастического моделирования...

данное неравенство). При  $b_2 \neq 0$  имеем стохастическую схему, описываемую гипергеометрическим распределением, которое получается при оценке вероятности появления белого шара  $m$  раз в  $n$  извлечениях, причем извлеченный шар снова не возвращается [82]. В такой ситуации испытания становятся зависимыми, а следовательно, статистические выводы – более общими, чем в случае, который приводит к кривой Пирсона III типа.

Таким образом, бассейн является линейным фильтром, преобразующим осадки, идеализируемые как белый шум (практически случайный процесс, радиус корреляции которого много меньше, чем время релаксации бассейна), в марковский случайный процесс изменения  $Q$ . Общая схема решения задачи оценки гидрологических последствий антропогенного изменения климата сводится к следующему. Решение (5.2) есть плотность вероятности  $p(Q)$ , которую в гидрологии из-за коротких рядов наблюдений вынуждены аппроксимировать первыми несколькими моментами. По существу, путем обработки существующих рядов стока созданы карты  $p(Q)$ , которые являются в указанном приближении одновременно решением (5.2). Эти карты отражают ситуацию, сформированную на речных бассейнах при стабилизированных параметрах  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ , и  $b_2$ . Решив обратную задачу (идентификации), можно по известным из карт  $p(Q)$  найти значения параметров для различных пунктов. Но так как из карт изолинии известно не все распределение  $p(Q)$ , а только его несколько моментов, то можно перейти, умножая (5.2) на  $Q^n$  и интегрируя по  $Q$  в пределах его изменения, к системе алгебраических уравнений для начальных моментов

$$m_{n-1}b_0 + m_n[b_1(n+1) - a] + m_{n+1}[(n+2)b_2 + 1] = 0, \quad (5.4)$$

где  $m_n$  – начальные моменты  $n$ -го порядка.

Зная их значения можно решить (5.4) относительно коэффициентов  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ , и  $b_2$ , соответствующих климату и характеру хозяйственной деятельности, которые сформировали существующий гидрологический режим. Затем по информации, имеющейся в климатическом сценарии, меняем в соответствии с формулами (5.3) параметры  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ , и  $b_2$  (все или частично), подставляем их в (5.4) и решаем эту систему уже относительно начальных моментов  $m_n$ . По вычисленным моментам нахо-

Михаил  
Юсупов  
БелГУ  
ИУКИ  
ш. Краснодар

## 5.2. Моделирование гидрологических последствий антропогенного изменения климата

дим расчетные гидрологические характеристики. По этим найденным значениям можно построить новую карту изолиний, дающую оценку последствий изменения климата на речных бассейнах.

При использовании системы (5.4) необходимо знать четыре момента, что затрудняет ее параметризацию. Есть некоторые пути, позволяющие идентифицировать  $(G_{\bar{c}})$  (а значит, и  $b_2$ ), например, используя аппроксимацию автокорреляционной функции годового стока зависимостью  $r = \exp[-(\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}})\tau]$ . При известном коэффициенте автокорреляции (см. [80]) для  $\tau = T = 1$  год можно найти значение  $G_{\bar{c}}$ , оценив предварительно  $\bar{c}$  по информации о трех начальных моментах. Но ориентация на очень ненадежные значения ординат автокорреляционных функций, особенно если они малы сами по себе, не лучше, чем привлечение информации о четвертом начальном моменте //

Из-за ограниченных рядов наблюдений в практической гидрологии используют только первые три момента, т. е. фактически считается, что  $G_{\bar{c}} = 0$ . При этом система алгебраических уравнений (5.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} b_1 + 0 \cdot b_0 - a &= -m_1, & m_1 &= (a - b_1) \\ 2m_1b_1 + b_0 - m_1a &= -m_2, & b_0 &= m_1^2 a - 2m_1b_1 - m_2 \\ 3m_1b_1 + 2m_1b_0 - m_2a &= -m_3. & \end{aligned} \quad (5.5)$$

Решая (5.5) относительно неизвестных параметров  $a$ ,  $b_0$ , и  $b_1$ , находим:

$$\begin{aligned} a &= 0,5(-m_3 - 4m_1^3 + 5m_1m_2)/(m_2 - m_1^2), & [dim_1] \\ b_0 &= 0,5(-2m_2^2 - m_2m_1^2 + m_1m_3)/(m_2 - m_1^2), & [dim_2] \\ b_1 &= 0,5(3m_1m_2 - 2m_1^3 - m_3)/(m_2 - m_1^2). & [dim_1] \\ b_2 &= \frac{-m_1 - 1/4 b_1 m_3 - 3/80 m_2 - (a m_3)}{5m_1^4} & [dim_1] \\ &\text{безразмерный} & 247 \text{ Гидр.спр.} \end{aligned}$$

Затем по формулам (5.3) находим параметры модели:

$$\bar{c} = \bar{N}/(a - b_1/2), \quad G_{\tilde{c}\tilde{N}} = \bar{N}b_1/(a - b_1/2) [m^2], \quad G_{\tilde{N}} = (-2Nb_0)/(a - b_1/2), \quad (5.6) \quad [m^2]$$

$\bar{G}_{\tilde{N}} = -2\bar{b}_0 \bar{c}$

где  $\bar{N}$  – норма осадков, соответствующая существующему климату.

Следующий этап состоит в задании прогнозных значений параметров. Вместо  $\bar{N}$  берем прогнозное значение  $\bar{N}_{np}$  из соответствующего сценария изменения климата. При задании параметра возможны два варианта: либо считать, что  $\bar{c}_{np} = \bar{c}$ , либо (учитывая, что значение  $\bar{c}$  близко к обратному значению коэффициента стока, который в некоторых природных зонах может меняться в зависимости от норм осадков  $N$  и температуры  $T$ ) брать его измененным  $\bar{c}_{np} = \bar{c} + f(\bar{N}, T)$ . Проясним смысл величины  $\bar{c}$ . Ранее мы обозначили  $c = 1/(k\tau)$ , где  $k$  – коэффициент стока,  $\tau$  – время релаксации. При  $\tau = 1$  значение обратно пропорционально коэффициенту стока, который определяется как отношение стока к сумме выпавших на площадь водосбора осадков, обуславивших возникновение этой порции стока. При переходе от динамического описания к стохастическому производится вероятностное определение и, как показано в гл. 3, получаем следующее дифференциальное уравнение для математического ожидания расхода воды:

$$dm/dt = (-\bar{c} + 0.5 G_{\tilde{c}})m - 0.5 G_{\tilde{c}\tilde{N}} + \bar{N}.$$

Для установившегося случайного процесса имеем

$$m = (\bar{N} - 0.5 G_{\tilde{c}\tilde{N}})/(\bar{c} - 0.5 G_{\tilde{c}}).$$

Если  $\bar{c}$  интерпретировать как величину, обратную коэффициенту стока, то совпадение с величиной  $c = 1/k$  будет только при нормальном распределении расхода воды, когда  $G_{\tilde{c}} = 0$  и  $G_{\tilde{c}\tilde{N}} = 0$ . Таким образом, отношение нормы стока к норме осадков в общем случае не равно тому коэффициенту стока, который определен ранее.

Что касается параметров  $G_{\tilde{N}}$  и  $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ , то следует принять

## 5.2. Моделирование гидрологических последствий антропогенного изменения климата

$G_{\tilde{N}_{np}} = G_{\tilde{N}}$  и  $G_{\tilde{c}\tilde{N}_{np}} = G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ , так как при сегодняшнем уровне развития гидрометеорологии нет никакой информации об их изменении в новом климате.

Далее находим

$$a_{np} = (G_{\tilde{c}\tilde{N}} + 2\bar{N}_{np})/(2\bar{c}_{np}),$$

$$b_{0 np} = -G_{\tilde{N}}/(2\bar{c}_{np}), \quad b_1 = 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}/(2\bar{c}_{np})$$

Затем, решая систему прогностических уравнений (5.5), находим:

$$m_{1 np} = q_{np} = (a_{np} - b_{1 np}),$$

$$m_{2 np} = m_{1 np} a_{np} - b_{0 np} - 2m_{1 np} b_{1 np},$$

$$m_{3 np} = m_{2 np} a_{np} - 2m_{1 np} b_{0 np} - 3m_{2 np} b_{1 np},$$

$$C_{v np} = \sqrt{(m_{2 np}^2 - q_{np}^2)/q_{np}^2},$$

$$C_{s np} = (m_{3 np} - 3m_{2 np} m_{1 np} + 2m_{1 np}^3)/(C_{v np}^3 q_{np}^3),$$

$$\beta_{np} = C_{s np} / C_{v np}.$$

По найденным значениям  $q$ ,  $C_v$  и  $\beta$  строим прогнозные гидрологические карты расчетных характеристик и их аномалий, т. е. отклонений от значений, соответствующих текущему климату.

Если физический смысл изменения  $q$  и  $C_v$  понятен и связывается с изменением общего фона водности региона и вариации стока, то изменение  $\beta$  ведет к более сложным последствиям. Наличие  $C_s > 0$  связано с асимметрией в рядах стока, когда среднее превосходит моду (наиболее вероятный, чаще всего встречающийся расход воды). Это